ELSEVIER
SPEKTRUM
AKADEMISCHER
VERLAG

Georg Glaeser

Geometrie und ihre Anwendungen

in Kunst, Natur und Technik

Einleitung

Die Idee zu diesem Buch trage ich schon lange mit mir herum. Ich halte seit Jahren Vorlesungen über Geometrie an der Universität für angewandte Kunst Wien, und die Studierenden (meist Architekten und Industrie-Designer) wollen verständlicherweise möglichst vollständige Unterlagen, um sich auf die Prüfungen vorzubereiten. Allerdings befand ich mich selbst in einem Entwicklungsprozess, der mich immer wieder zweifeln ließ, ob ich schon die beste Methode gefunden hatte, meine geliebte Geometrie jungen Menschen zu vermitteln.
Da ich auch Mathematik-Vorlesungen abhalte, stürzte ich mich zunächst auf die Mathematik. Im Frühjahr 2004 erschien beim selben Verlag *Der mathematische Werkzeugkasten – Anwendungen in Natur und Technik*, in dem naturgemäß auch schon einige geometrische Abschnitte zu finden sind. Auf dieses Buch wird immer wieder Bezug genommen.

Eigenständige Geometrie?

Die Geometrie wird im Allgemeinen als Teilgebiet der Mathematik angesehen. Tatsächlich ist die gedankliche Vorgangsweise eng mit der mathematischen Logik verknüpft. Wegen ihrer enormen Bandbreite sehen viele die Geometrie auch als eigenständige Wissenschaft. In jedem Fall ergänzen einander Mathematik und Geometrie wunderbar. Trotzdem: Wenn Sie dieses Buch lesen, brauchen Sie keine speziellen mathematischen Vorkenntnisse. Alles, was wir an mathematischem Rüstzeug brauchen, wird sich wie von selbst ergeben.
Geometrie kann auf unterschiedliche Art betrieben werden. Jene Geometrie, die in diesem Buch vermittelt wird, *wendet sich so oft wie möglich direkt an das räumliche Vorstellungsvermögen*. Dieses ist bei den verschiedenen Menschen mehr oder weniger stark ausgeprägt, aber Versuche haben gezeigt, dass unsere Raumvorstellung speziell durch die Beschäftigung mit Geometrie enorm gesteigert werden kann. Sie werden zwar immer wieder Bemerkungen (klein gedruckt) über die analytische Geometrie bzw. Infinitesimalrechnung finden, dies aber hauptsächlich zur Untermauerung des mit der Raumvorstellung erarbeiteten Gedankenguts.

Ein sechster Sinn

Weil nun die Geometrie diesen „sechsten Sinn“ der Raumvorstellung ausnützen (und im Gegenzug sogar verbessern) kann, führt sie bei jungen Menschen nicht selten schneller zu Fortschritten als die übrige Mathematik. Letztere verlangt nämlich sehr solide Grundlagen, denn sonst könnte in jeder Rechenzeile ein Fehler stecken, der übersehen wird. Die Geometrie, von der hier die Rede ist, liefert hingegen ständig Ergebnisse, die wir mit unserer Vorstellung kontrollieren können. Die fast immer geometrisch geführten („synthetischen“) Beweise sind allein schon deswegen meist den rein mathematischen („analytischen“) Beweisen vorzuziehen. Nicht selten steckt in den Beweisen so viel

Verständnis für die Sache, dass sich zwanglos neue oder zusätzliche Ergebnisse und Ergänzungen einstellen.

Darstellende Geometrie und noch viel mehr

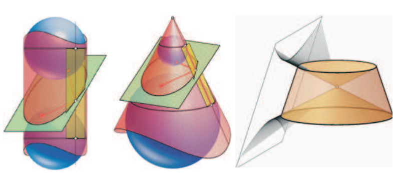
Mein vor Jahren erstelltes Konzept basierte auf den Ideen meines akademischen Lehrers Walter *Wunderlich* und meines Vorgängers Erich *Frisch*, die beide in traditioneller Weise ein einfaches aber doch vollständiges Lehrgebäude der „Darstellenden Geometrie" zusammengestellt hatten. Nachdem die Zeit nicht stillgestanden war und sich – gerade auf dem Gebiet der Geometrie – durch den Siegeszug des Computers eine Revolution abgespielt hatte, musste das Konzept stark modifiziert bzw. erweitert werden. Vor allem werden immer wieder Bezüge zu den verwandten Gebieten *Computergrafik* bzw. *Computergeometrie* hergestellt, die ihre Wurzeln in der klassischen Geometrie haben. Auch soll sich die Geometrie, die hier vermittelt wird, nicht nur auf das Darstellen beschränken, zumal sich gerade beim Erstellen von Bildern im Computerzeitalter viel geändert hat.

Wo Geometrie mitmischt

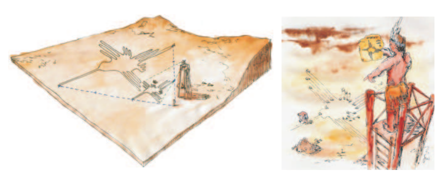
Naturgemäß gibt es eine Vielzahl von Querverbindungen der Geometrie zu technischen Wissensgebieten, etwa dem *Maschinenbau*, der *Architektur* und dem *Bauingenieurwesen*. Ein zweiter Anwendungsblock geht in die Richtung *Bildende Künste* und *Design*. Aber auch die *Physik*, *Astronomie*, *Geografie*, *Chemie*, *Biologie* und *Molekularbiologie* bedienen sich der Geometrie, um Ergebnisse zu veranschaulichen oder neue Erkenntnisse abzuleiten. Schlussendlich kann man die harmonikalen Zusammenhänge in der *Musik* wunderbar durch die Geometrie verdeutlichen.

- Wann betrachtet man eine geometrische Fragestellung lieber eine Dimension tiefer? Eine Drehung um eine Gerade können wir uns z.B. viel besser vorstellen, wenn die Gerade als Punkt erscheint. Wenn man die Technik beherrscht, wie man so etwas zu Wege bringt, kann man viele Probleme vereinfachen.

- Wann hingegen betrachtet man das Problem lieber „von einer höheren Warte"? Die ebenen Kegelschnittslinien sind – räumlich betrachtet – gar nicht so unterschiedlich. Höherdimensionale Wesen würden so manche unserer Fallunterscheidungen als überflüssig betrachten.



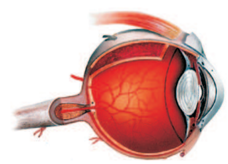
Kegelschnitte



Erstellen eines Scharrbilds

- Wie konnten die Ureinwohner Perus ihre gigantischen Scharrbilder in der Wüste von Nazca erzeugen, ohne deshalb den Heißluftballon erfunden haben zu müssen? Eine Kombination aus Zentralprojektion und zentrischer Streckung macht es möglich.

- Wie funktioniert unser Sehen wirklich, und wie bildet ein Fotoapparat ab? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit wir eine Fotografie als „natürlich“ und nicht extrem verzerrt oder zu sehr abgeflacht empfinden? Solche Fragen stellten sich schon vor fünfhundert Jahren Leonardo *da Vinci* und Leone Battista *Alberti*, die mit exakten Projektionen des Raums auf eine Ebene arbeiteten.

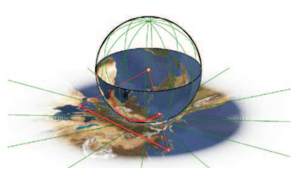


Lichtberechung am Auge

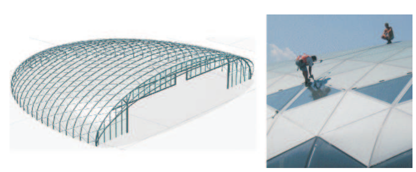
Wie viele Bilder braucht man?

- Wann kann man eine Fotografie „entzerren“? Wie viele Fotos eines Objekts braucht man, um daraus seine wahre Gestalt eindeutig feststellen zu können? Diese Frage beschäftigt nicht nur Architekten, sondern neuerdings vor allem Konstrukteure von 3D-Scannern.

- Wie muss eine Landkarte aussehen, auf der die kürzesten Strecken zwischen zwei Punkten der Erdkugel sich gerade oder als Kreisbögen abbilden? Aus welchen Karten lässt sich der Kurswinkel direkt ablesen? Das Problem entsteht aus dem Dilemma, dass man die Kugel nicht in die Ebene ausbreiten kann. Die gesamte Kartografie lebt von geometrischen Erkenntnissen.



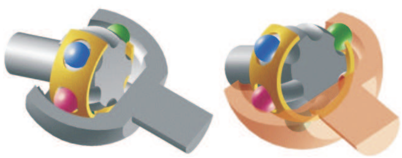
Landkarten und kürzeste Strecken



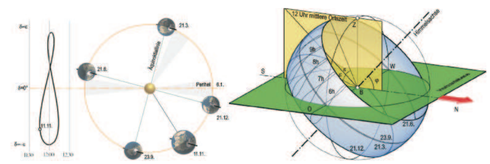
Gute Triangulierung

- Die Architekten bauen heute gerne gekrümmt. Kann ihnen die Geometrie helfen, die dabei entstehenden horrenden Baukosten auf ein Minimum zu reduzieren?

- Wie kann eine Drehung um eine Achse auf eine andere Achse übertragen werden, und mit welchem Trick funktioniert das Ganze sogar gleichmäßig? Diese Frage ist für den Maschinenbau wichtig.



Gleichlaufgelenk



Bewegung der Erde um die Sonne

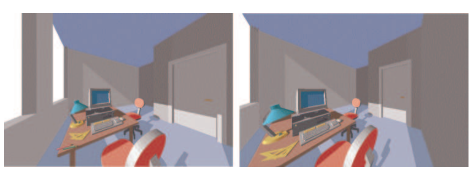
- Wieso dauert es nicht immer gleich lang, bis die Sonne wieder ihren Kulminationspunkt erreicht? In dieser astronomischen Frage steckt ein bisschen Physik, aber noch viel mehr Geometrie.

- „Durch einen Punkt gibt es genau eine Parallele zu einer vorgegebenen Geraden.“ Was passiert, wenn man diesen nicht beweisbaren Eckpfeiler der Geometrie herauszieht? Es entsteht eine fremdartige „Nichteuklidische Geometrie“, deren Ergebnisse sogar in der modernen Physik Verwendung finden!

Hyperbolische Geometrie

Schnecken und Hörner

- Was kann man aus der Gestalt von Schneckengehäusen oder Tierhörnern über deren Wachstum ableiten? Wie kommt man zur Gestalt der Doppelhelix? Schließlich ist diese Struktur der DNS zum Symbol der modernen Biotechnologie geworden.



Extreme Perspektiven

Der Trick mit dem Shift-Objektiv

- Wie erzeugt man mit einfachen Tricks Bilder, die sonst nur teueren Shift-Objektiven vorbehalten sind? Warum ist die Wahl der Brennweite nicht nur eine Frage des „Überblicks“, sondern auch der weiteren Verwendung der Fotografie? Wann sind Ultra-Perspektiven nicht nur erlaubt, sondern sogar notwendig? Warum hängt die Schärfentiefe von der Blende ab?

Solche und viele andere Fragen wollen wir in diesem Buch anschneiden und auch beantworten.
Die heutigen Studierenden haben den Vorteil, dass sie mit Computerprogrammen arbeiten können, die Ihnen mühevolle und rein routinemäßige Zeichenarbeit abnehmen. Das Schwergewicht der Geometrie kann und muss sich

daher immer mehr auf das geometrische Verstehen und Analysieren von Vorgängen verlagern. Als Folge der Lehrplan-Anpassung können endlich auch Probleme besprochen werden, die bisher keinen Platz in einem solchen Rahmen fanden, die aber in der Berufspraxis der Zielgruppen sehr wohl von Bedeutung sind.

Spitzfindigkeiten

Dabei erscheint mir wichtig, Sätze oder Regeln zunächst einmal *so einfach wie möglich* zu formulieren, und erst in weiterer Folge auf Spezialfälle und Spitzfindigkeiten einzugehen.
So sagen wir z.B. zunächst (s.S. 49): „Sind zwei Geraden in zwei unterschiedlichen Parallelprojektionen parallel zueinander, dann sind sie es im Allgemeinen auch im Raum.“ Die Ausnahmen werden im Anschluss zumeist auch besprochen – in diesem wichtigen Fall sogar genauer.
Noch zwei Beispiele: Wenn eine Kurve „nicht gekrümmt“ ist oder „keine Krümmung hat“, soll das natürlich heißen, dass sie mathematisch gesehen die Krümmung Null hat. Oder: „Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.“ Natürlich: Wenn die Ebene die Kugel berührt, schrumpft dieser Kreis auf einen Punkt („Nullkreis“) zusammen. Und wenn die Ebene die Kugel nicht schneidet? Professionelle Mathematiker können beweisen, dass wir es dann mit einem imaginären Kreis zu tun haben. Also wie sollen wir den Satz jetzt formulieren, ohne ihn für den Laien zu schwer lesbar zu machen? Jeder Mensch wird den vereinfachten Satz richtig verstehen, und die fundamentale Aussage bleibt *kurz und prägnant*!

Die zugehörige Webseite `www.uni-ak.ac.at/geom`

So wie zum *mathematischen Werkzeugkasten* gibt es zum Buch begleitend eine Homepage. Dort finden Sie Aktualisierungen, weitere Beispiele, Internet-Adressen zu den verschiedenen Spezialthemen und nicht zuletzt Dutzende von lauffähigen Demo-Programmen, mit denen Sie interaktiv arbeiten können. Insbesondere lassen sich zahlreiche komplizierte Bewegungsabläufe oder physikalische Simulationen nachvollziehen.
Der Vorteil einer solchen zusätzlichen Unterstützung liegt auf der Hand: Erstens kann die Webseite ständig am neuesten Stand gehalten werden, und zweitens kann sie wachsen und reichhaltiger werden, ohne das Grundgerüst, nämlich das Buch, ändern zu müssen. Ich hoffe, dass, wie beim *mathematischen Werkzeugkasten*, die Leser wieder viel Gebrauch von der Homepage machen und auch Rückmeldungen geben!

Danksagungen

Für ihre Mithilfe beim Korrigieren, aber auch für interessante Diskussionen und das Erstellen nicht weniger Bilder, danke ich meinen Mitarbeitern Franz *Gruber*, Thomas *Backmeister* (er leistete einen bedeutenden Beitrag zum Anhang über Parkettierungen) und Christian *Perrelli* (Anhang zum Freihandzeichnen). Korrekturleser waren Wilhelm *Fuhs*, Herbert *Löffler*, Micha-

el *Schrott* und Boris *Odehnal*. Einige Illustrationen stammen von Harald Andreas *Korvas*, Zorica *Nicolic*, Otmar *Öhlinger*, Markus *Roskar*, Paulo *Tosold* und Stefan *Wirnsperger*. Auch meine ehemaligen Mitarbeiter Hans-Peter *Schröcker* und Gerhard *Karlhuber* haben einige Abbildungen zu diesem Buch beigesteuert.
Unterstützung kam von Kollegen an der Technischen Universität Wien (Andreas *Asperl*, Fritz *Manhart* und Walter *Jank*). Bei den Sonnenuhren lieferte Walter *Hofmann* einen wertvollen Beitrag. Andreas *Rüdinger* vom Verlag brachte immer wieder gute Ideen ein.
Ich habe das Glück, an einer Kunstuniversität zu lehren und Künstler wie Zaha *Hadid*, Hans *Hollein*, Bernhard *Leitner*, Greg *Lynn*, Paolo *Piva*, Wolf D. *Prix* und Boris *Sipek* zu meinen Kollegen zählen zu dürfen. Von ihnen sind Beispiele im Buch zu finden. Weitere freundliche Unterstützung kam von den Kollegen Klaus *Bollinger*, Ernst *Maczek-Mateovits*, Roland *Burgard* und Marcus *Bruckmann*. Bei physikalischen Fragen bekam ich stets kompetente Auskunft von Georg *Fuchs* und meinem Bruder Othmar *Glaeser*.
Ich habe auch den Studierenden der Universität für angewandte Kunst Wien zu danken, die in einem Wechselspiel aus Geben und Nehmen ständig neue Ideen eingebracht und teilweise auch verwirklicht haben. Einige ihrer Arbeiten werden in diesem Buch vorgestellt.
Die „akrobatischen Einlagen“ auf einigen Fotos stammen von meinen sportlichen Neffen (Abbildungen 1.40, 3.5, 3.39 und 10.1).
Meine derzeit 12-jährige Tochter Sophie hat wieder einige Zeichnungen (z.B. Abb. 3.46) angefertigt, aber auch einfache Modelle gebastelt (Abb. B.4) und sogar eine Parkettierung erfunden (Abb. A.13). Bei ihr und vor allem bei meiner Frau Romana bedanke ich mich für die große Geduld, wenn es darum ging, jede Wanderung und jeden Urlaub bis zu einem gewissen Grad der „Fotografiererei“ unterzuordnen. Von beiden stammen zudem nicht wenige Einfälle für Fotos, die das Buch zu einer Art „Bilderbuch der Geometrie“ gemacht haben. Gute Fotos entstehen nur selten „von selbst“ oder ausschließlich mit teuren Fotoapparaten. Es braucht Geduld, ein gutes Auge und – wie ich im Anhang zu zeigen versuche – auch geometrisches Verständnis.

Wien, im März 2005

Inhaltsverzeichnis