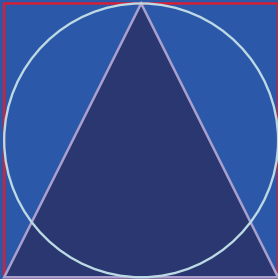


Einleitung



Mathematik und Visualisierung gehen seit einigen Jahren Hand in Hand und ergänzen sich dabei in kreativer Weise: So entwickelt die Mathematik neue Algorithmen für Verfahren der Computergraphik und profitiert umgekehrt von der anschaulichen Visualisierung ihrer oftmals abstrakten Strukturen. Die Mathematik erscheint nicht mehr nur in Form langer Zahlenkolonnen und komplexer Formeln, sondern zeigt auch ihre bunte Seite, in überwältigend schönen Bildern und allgemein verständlichen Zusammenhängen.

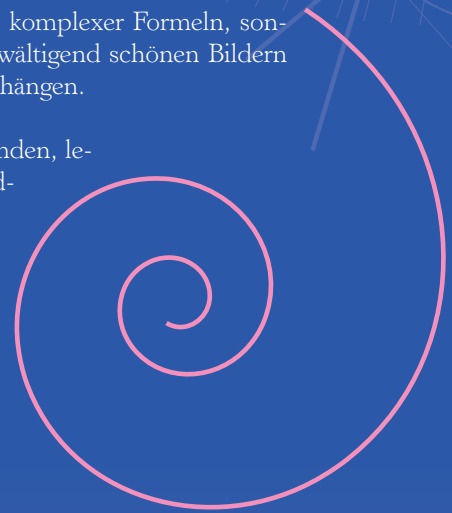
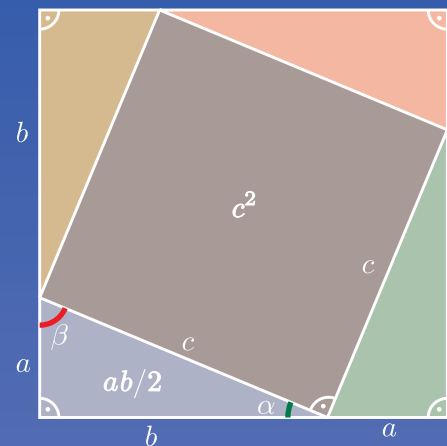
In diesem Buch stellen wir die faszinierenden, lebendigen Seiten der Mathematik mit teilweise völlig neuartigem Bildmaterial vor. In bisher nie gesehenem Umfang zeigen wir Bilder aus vielen Zweigen der Mathematik und führen den Leser visuell zu den vielfältigen Themen dieser Wissenschaft.

Der Mensch ist visuell veranlagt, und Bilder prägen sich oft in Sekundenschnelle ins Bewusstsein ein: Kein Wunder, dass der wichtigste Wiedererkennungswert für eine Firma das Logo ist. Dieses ist sehr oft ein einfaches geometrisches Muster. Das Bild links könnte das Logo von *Archimedes* sein – ebenso wie die logarithmische Spirale rechts jenes von *Jakob I. Bernoulli*. Beide Mathematiker hatten sich ihr „Logo“ auf dem Grabstein gewünscht, allerdings meisselte der Steinmetz bei Bernoulli stattdessen eine archimedische Spirale.

Viele Bilder in diesem Buch sind wie ein Logo und symbolisieren in charakteristischer Weise ein bestimmtes Thema, einen Satz oder ein Verfahren. In ihrer Vielfalt spannen sie dabei einen Rahmen von der Schulmathematik bis hin zur aktuellen Forschung. Neben klassischen Figuren haben wir für viele Themen auch neuartige Visualisierungen entwickelt, die hier zum ersten Mal ausgestellt werden.

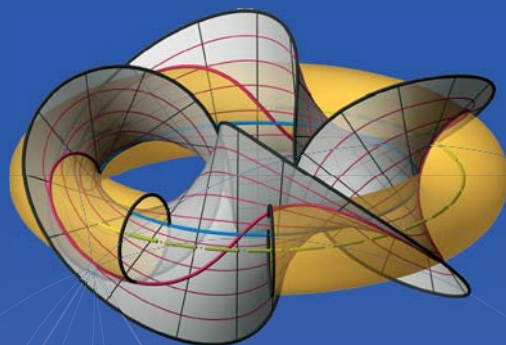
Ein fast banaler, aber durchaus hilfreicher Spruch aus der Schule lautet: „Von der Lösung keine Spur, dann zeichne eine Hilfsfigur.“ Um zum Beispiel den „Pythagoras“ zu beweisen, bietet sich die Figur rechts an. Aus ihr liest man sofort

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= 2ab + c^2 \\ \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$



Im Buch haben wir viele solche Hilfsfiguren aufgenommen, unter anderem damit der Leser, der vielleicht auch Lehrer ist, gleich eine „ordentliche“ Zeichnung vorfindet.

Der Spagat zwischen ausreichend Text und Formeln einerseits sowie der Nachvollziehbarkeit und Erlebbarkeit der Bilder andererseits war eine große Herausforderung. In den meisten Fällen behandeln wir unsere Themen nach dem Doppelseiten-Prinzip: Ein Thema wird auf der linken Buchseite vorgestellt und auf der rechten Seite mit weiterem Text und Illustrationen vertieft.

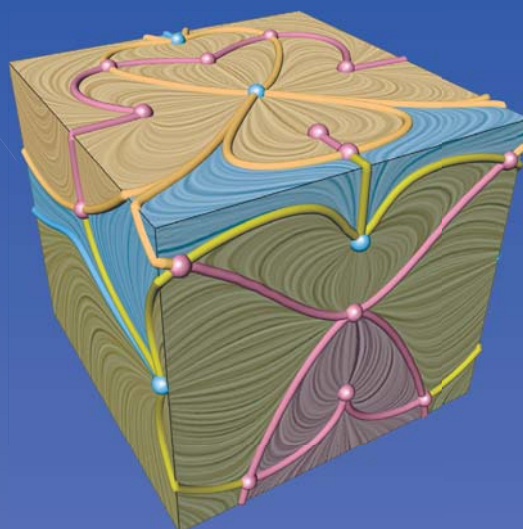


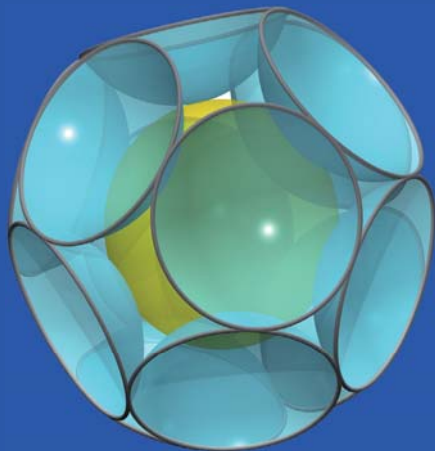
Für einen grundlegenden Überblick sollte dies genug Informationen zum angesprochenen Thema liefern. Eine exemplarische Auswahl von Literaturangaben und Internet-Adressen ermöglichen es dem interessierten Leser, sich ohne langwierige Anlaufzeit gezielt weiter zu informieren.

Ein Teil des Bildmaterials stammt aus dem eigenen Fundus der Autoren und wurden über Jahre hinweg erstellt. Großzügigerweise haben darüber hinaus viele Mathematiker- und Computergraphiker-Kollegen aus der ganzen Welt weitere außergewöhnliche Bilder zur Verfügung gestellt.

Ebenso haben wir tatkräftige Unterstützung von vielen Mitarbeitern erhalten, die Bilder und Beiträge zum Buch angefertigt haben. Ihre Namen und gegebenenfalls ihre Webseiten sind in den jeweiligen Fußnoten und im Bildnachweis aufgeführt. Ein besonderer Dank für selbsterstellte Figuren geht dabei an *Franz Gruber*, *Kai Lawonn* und *Günter Wallner*.

Das Layout des Buches und der individuellen Seiten wurde von *Peter Calvache* und *Marianne Braun* entwickelt und umgesetzt. Zusätzlich zu ihren Bildern und Ideen haben beide damit wesentlich zum Gelingen des Projekts beigetragen. Für konstruktive Korrekturvorschläge bedanken wir uns bei *Gerd Baron*, *Herbert Löffler*, *Ulrich Reitebuch* und *Sylvia Rockel*. *Tobias Pfeiffer* hat die Berlin-Wiener Kooperation auf technischer Seite ermöglicht. Auf Verlagsseite möchten wir *Andreas Rüdinger* besonders danken, der jede Phase der Entstehung des Buchs intensiv und mit konstruktiven Vorschlägen begleitet hat.





Dieses Buch kann und soll kein Lehrbuch im üblichen Sinne sein. Es wurde auch nicht der Versuch unternommen, die zahllosen Teil- und Anwendungsgebiete der Mathematik streng hierarchisch zu klassifizieren. Allein schon die Kapitelüberschriften wird man in dieser Form wohl selten in klassischen Mathematikbüchern finden. Immerhin haben wir uns bemüht, möglichst viele Gebiete der Mathematik abzudecken – gerade auch solche, zu denen man kein ansprechendes und lehrreiches Bildmaterial erwartet hätte.

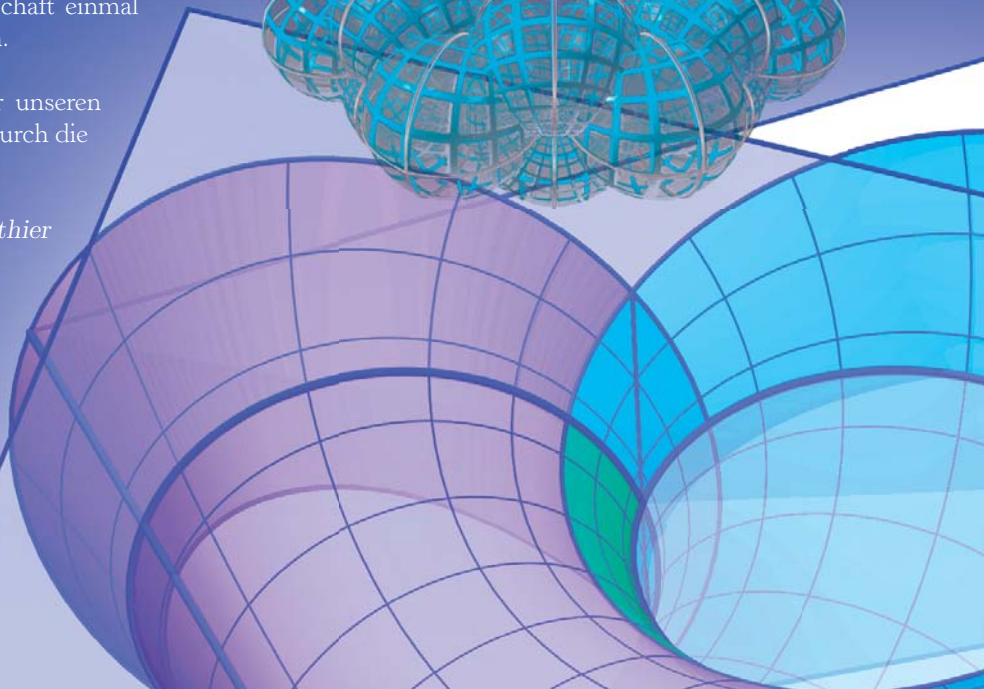
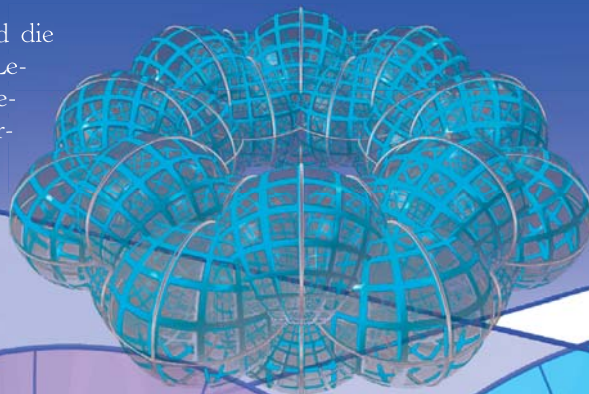
Insgesamt entstanden so 15 Kapitel, deren Reihenfolge keinem besonderen System folgt: Wer dieses Buch zum ersten Mal aufschlägt, soll von jeder nächsten Seite und jedem nächsten Kapitel im positiven Sinne überrascht sein. Wir beginnen also nicht wie gewohnt mit den einfachsten Problemen, sondern stürzen uns mitten hinein in die Vielfalt der Mathematik. Insbesondere kann man das Buch an jeder Stelle aufschlagen und gleich zu lesen beginnen.

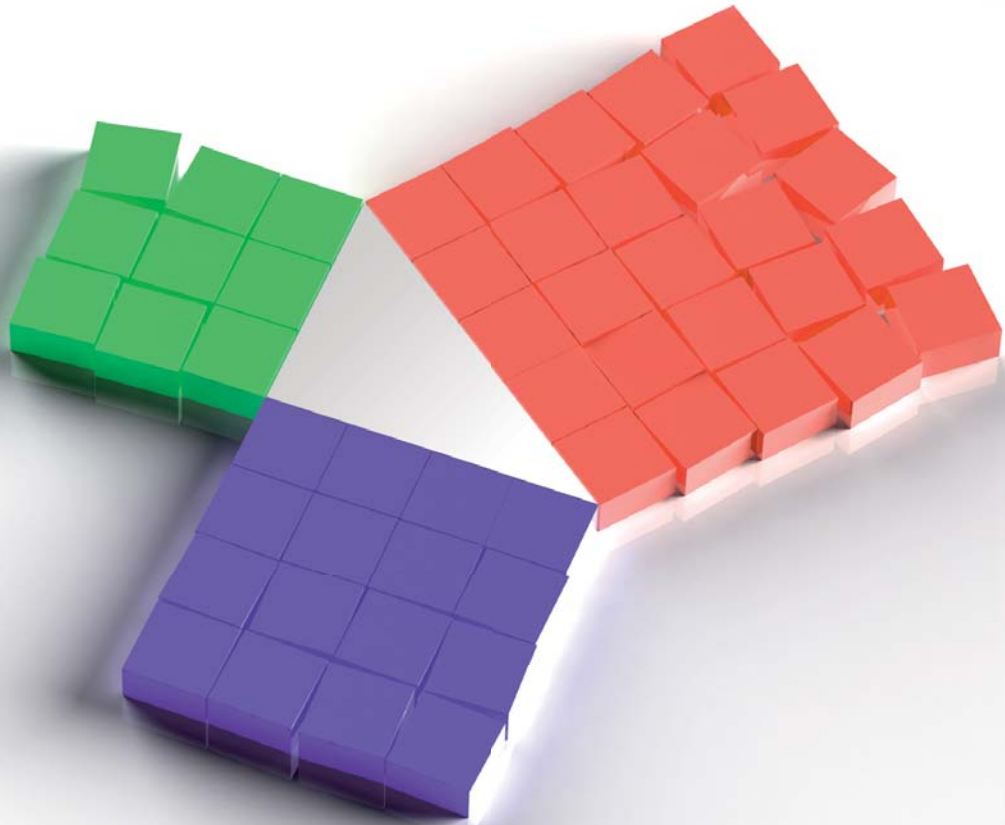
Durch die kunterbunt gemischten Themengebiete und die unterschiedlichen Schwierigkeitsgrade hoffen wir, alle Leser mit Freude an mathematischer Denkweise anzusprechen: Schüler, Lehrer, Studierende, mathematisch interessierte Laien jeden Alters und natürlich auch „echte“ Mathematiker, die ihre Wissenschaft einmal in bunten Farben sehen möchten.

In diesem Sinne wünschen wir unseren Lesern eine vergnügliche Reise durch die Bilder der Mathematik!

Georg Glaeser und Konrad Polthier

Wien und Berlin, März 2009





Der Satz von Pythagoras gehört zu den berühmtesten und einprägsamsten Aussagen der Mathematik. Im oberen Bild wurde er mit Hilfe farbiger, leicht abzählbarer Klötzchen zusätzlich hervorgehoben.

Inhalt

1 Polyedrische Modelle	1	Pascal und Fibonacci	54
Platonische Körper.....	2	Pascal'sche Pyramiden	55
Dualität und Symmetrie	4	Abschätzung der Primzahlenverteilung.....	56
Archimedische Körper.....	6	Die Primzahlspirale von Ulam.....	57
Johnson- und Catalan-Körper	8	Wie viele Zahlen gibt es?	58
Die Geometrie des Fußballs	10	Verrückte Formeln der Kreiszahl π	60
Spezielle Tetraeder	12		
Der Höhenregulus	13	5 Funktionen und Grenzwerte	63
Die Kunst des Auffaltens	14	Nicht-differenzierbare Funktionen	64
		Die Taylor-Reihenentwicklung.....	66
2 Geometrie in der Ebene	17	Fourierreihen und periodische Signale	68
Der Satz des Pythagoras.....	18	Totale vs. partielle Differenzierbarkeit.....	69
Der Neunpunktekreis von Feuerbach.....	20	Die Weierstraß'sche ζ -Funktion und ihre Ableitung	70
Konzentrische Kreise	21	Solitonen	72
Metrische und projektive Skalen.....	22	Das Volumen der Kugel und der gestanzten Kugel	74
Der Fermat-Punkt	23	Der Brouwer'sche Fixpunktsatz	76
Der Satz von Morley.....	24		
Der Satz von Fukuta und Cerin	25	6 Kurven und Knoten	79
Probleme von Maclaurin-Braikenridge.....	26	Kegelschnitte – planimetrisch und räumlich definiert.....	80
Herleitung der Additionstheoreme	28	Sphärische Kegelschnitte und konfokale Kegelschnitte.....	82
Eingeschriebene Quadrate und gleichseitige Dreiecke	30	Dandelin'sche Kugeln	84
Halbierung der Dreiecksfläche	32	Apollonische Kreise	85
Jeder Winkel ein rechter Winkel?	33	Kubische Kurven.....	86
		Cassini'sche Kurven	88
3 Alte und neue Probleme	35	Die Astroide.....	89
Die Winkeldreiteilung.....	36	Konchoiden	90
Die Delí'sche Würfelverdoppelung.....	37	Geodätische Kurven und geradeste Linien.....	92
Die Collatz-Vermutung.....	38	Die Zoll-Fläche	94
Dominosteine auf dem Schachbrett	40	Geodätische auf Polyedern	96
Der Schinkenbrotsatz.....	41	Knoten	98
Der Satz von Pick.....	42	Keltische Knoten.....	100
Die Goldbach'sche Vermutung	43	Borromäische Ringe	102
Die Riemann'sche Zeta-Funktion.....	44		
		7 Geometrie und Topologie von Flächen	105
4 Formeln und Zahlen	47	Hyperboloide und Paraboide	106
Die Gauß'sche Summenformel	48	Quadriken und Kreisschnitte.....	108
Summe der Quadrate.....	49	Die Clebsch-Fläche und singuläre Kubiken	110
Summation von Brüchen	51	Dupin'sche Zykliken.....	112
Das Pascal'sche Dreieck.....	52	Superzykliken	114

Das Plücker-Konoid	115	Eschers hyperbolische Ebene.....	190
Schraubung und Spirallung	116	Ideale Polyeder im hyperbolischen Raum	192
Rotoidenwendelflächen	119	Die Form des Raumes.....	194
Kragenflächen und abwickelbare Streifen	120	Der vierdimensionale Würfel und seine Abwicklung.....	196
Die Pseudosphäre	122	Das Hyperdodekaeder	198
Die Kuen-Fläche.....	124	120 Zellen und mehr!	200
Der Császár-Torus	126		
Das Möbiusband	128	11 Graphen und Inzidenzen	203
Die Klein'sche Flasche	130	Der Satz von Pascal und sein duales Gegenstück	204
Modelle der projektiven Ebene	132	Der Satz von Desargues	206
Seifert-Flächen	134	Berührende Kreise	208
Alexanders gehörnte Sphäre	136	Ausweichen in den Raum	210
Umstülpung der Kugeloberfläche.....	138	Kurvensysteme definieren Gebiete	211
		Der Petersen-Graph	212
8 Minimalflächen und Seifenblasen	141	Hamilton-Kreise und Euler-Kreise.....	214
Minimalflächen und Seifenhäute.....	142	Venn-Diagramme.....	216
Klassische Minimalflächen	144	Schlegel-Diagramme.....	218
Das Gergonne-Problem.....	146	Minimale Spann bäume	220
Vom Katenoid zum Helikoid.....	148	Abzählen von Triangulierungen	222
Das Katenoid und seine Variationen.....	150		
Periodische Minimalflächen	152	12 Bewegliche Formen.....	225
Die Costa-Fläche	154	Die Ellipsenbewegung	226
Diskrete Minimalflächen	156	Bewegliche Polyeder	227
Flächen aus Kreismustern.....	158	Bahnkurven und Hüllflächen.....	228
Die Wente-Fläche	160	Zwangsläufige Raumbewegungen	229
Geschlossene Seifenblasen	162	Freiheitsgrade.....	230
Die Penta-Fläche.....	164	Das rollende Reuleaux-Dreieck.....	232
		Der Gömböc	233
9 Parkette und Packungen.....	167		
Bandornamente.....	168	13 Fraktale Mengen	235
Ornamentik	170	Der Pythagoras-Baum.....	236
Nicht-periodische Parkettierungen	174	Füllen von Ebene und Raum mit geschlossener Kurve	238
Die Kusszahl	177	Hilbertkurven auf der Kugel	240
Raumparkettierungen	178	Fraktale Dimension.....	241
Der Weaire-Phelan-Schaum und optimale Raumpackungen.....	180	Der Menger-Schwamm	242
Ebene und räumliche Voronoi-Diagramme.....	182	Julia-Mengen und das Apfelmännchen.....	244
		Das Feigenbaum-Diagramm	246
10 Raumformen und Dimensionen.....	187	Der Lorenz-Attraktor.....	248
Die hyperbolische Ebene	188	Curlicue-Fraktale.....	250

Zufällige Wege.....	252
Perkolation	256
14 Landkarten und Abbildungen	259
Isometrische Landkarten	260
Gnomonisch oder stereographisch	262
Inversion und Projektion.....	264
Der Umriss einer Kugel	265
Möbius-Transformationen aus Bewegungen der Kugel.....	266
Der Riemann'sche Abbildungssatz.....	268
Die Schwarz-Christoffel-Abbildung.....	270
Parametrisierung von Flächen.....	272
Raumkollineation.....	274
Nullstellen komplexer Funktionen	276
Die Riemann'sche Zahlenkugel	277
Gebietseinfärbung.....	278
Die Szegő-Kurve	280
Polynomiographie.....	281
Nullstellen von Polynomen.....	282
15 Formen und Verfahren in Natur und Technik.....	285
Zahlen in Bewegung.....	286
Die von Kármán'sche Wirbelstraße	288
Topologie von Strömungen.....	290
Stromlinien.....	292
Elektrische Feldlinien	294
Die Glättung von 3-D-Scannerdaten.....	296
Schwingungen.....	298
Das Problem des Handlungsreisenden	300
Sortierverfahren.....	302
Der DNS-Doppelstrang.....	305
Virtuelle Kieferchirurgie.....	306
Radiolarien.....	308
Epipolargeometrie.....	310
Vom Foto zur Raumsituation	311
Spiegelungen.....	312
Bildnachweis	315
Index	319