

Zahlen haben stets eine magische Faszination auf die Menschen ausgeübt. Bei vielen Sachverhalten sagen wir: „Das kann kein Zufall sein.“ Sicher kein Zufall ist z.B. das „Hexen-Einmaleins“ von *Goethe* aus seinem berühmten „Faust“.

Hexen-Einmaleins und magisches Quadrat der Ordnung 3

Magische Quadrate haben die Menschen über Jahrtausende beschäftigt. Man versteht darunter quadratische Zahlenmatrizen (n Zeilen, n Spalten), in denen i. Allg. die ersten n^2 natürlichen Zahlen so angeordnet sind, dass die Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und zusätzlich in den beiden Diagonalen gleich groß ist. Diese Summe s ist dann bekannt:

$$s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k, \text{ also etwa für } n = 3: s = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 k = \frac{1+2+\dots+9}{3} = \frac{45}{3} = 15.$$

Es gibt viele bekannte Beispiele für magische Quadrate höherer Ordnung, aber nur eines der Ordnung $n = 3$ (natürlich kann man die Lösung noch auf mehrere Arten spiegeln). Ein magisches Quadrat der Ordnung 4 stammt von *A. Dürer*¹.

Anwendung: Wie merkt man sich das magische Quadrat der Ordnung 3?

Die Antwort steht in *J. W. v. Goethes* „Faust I“ im sog. „Hexen-Einmaleins“ (Abb. A.1):



Du mußt versteh'n, aus Eins mach Zehn. Die Zwei lass geh'n. Die Drei mach gleich, So bist Du reich. Verlier die Vier. Aus Fünf und Sechs, So spricht Die Hex', Mach Sieben und Acht, So ist's vollbracht. Die Neun ist eins Und Zehn ist keins. Das ist das Hexeneinmaleins. Faust quittierte diesen Vers übrigens lapidar mit

Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber.

Goethe gab darin allerdings verschlüsselt die Information für die Erzeugung eines magischen Quadrats der Ordnung 3. Dazu gibt es einige Interpretationen. Die folgende stammt vom Verfasser:

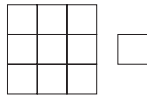


Abb. A.1 Aus 1 mach 10

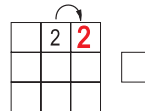


Abb. A.2 Die 2 lass geh'n

1. „*Du mußt versteh'n, aus Eins mach Zehn.*“ wird nicht auf die Zahlen bezogen, sondern auf die Anzahl der Quadrate! Aus einem kleinen Quadrat mach 10, indem du 9 weitere (in Matrixform) dazu zeichnest (Abb. A.1).
2. „*Die Zwei lass geh'n.*“ wird wörtlich genommen: die 2 wandert (geht) von der 2. auf die 3. Position (Abb. A.2).



Abb. A.3 Die 3 mach gleich

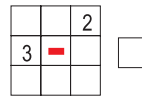


Abb. A.4 Verlier die vier

3. „*Die Drei mach gleich, so bist du reich.*“: Die 3 wird angeschrieben (mittlerweile an Position 4, Abb. A.3). Damit ist schon viel gewonnen, wie wir gleich sehen werden.
4. „*Verlier die Vier*“: Also schreib' die 4 nicht an und geh' zum nächsten Feld (Abb. A.4).

¹Siehe dazu etwa <http://forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square/al.html>

		2
3	-	5
6		

		2
3	-	7
8		

Abb. A.5 5, 6 \rightarrow 7,8

		2	4		2	4	9	2
3	5	7	3	5	7	3	5	7
8		6	8	1	6	8	1	6

Abb. A.6 Vollbracht!

5. „Aus Fünf und Sechs, So spricht die Hex, Mach Sieben und Acht“: Jetzt kämen 5 und 6 an die Reihe. Stattdessen schreiben wir aber 7 und 8 hin (Abb. A.5).
6. „So ist's vollbracht.“ Das ist der Schlüsselsatz: Es ist tatsächlich vollbracht. Wir können nun der Reihe nach die Summen auf 15 ergänzen (Abb. A.5)!

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abb. A.7 9 ist 1 und 10 ist kein's

7. „Die Neun ist eins Und Zehn ist keins. Das ist das Hexeneinmaleins“. Wir nehmen es wörtlich: 9 Quadrate werden zu einem vereinigt, und das 10. streichen wir weg (Abb. A.7). Fertig! Viel Spass beim Wiederholen des Vorgangs ohne die genaue Anleitung – nur unter Verwendung des Texts!

Andere Interpretationen bzw. Informationen über magische Quadrate:

- <http://zeus.informatik.uni-frankfurt.de/haase/hexenlsg.html>
Lösungsversuch: Hier kommen inkonsistenterweise nicht die Zahlen 1 und 9 vor, stattdessen aber 0 und 10. Zudem ist die Summe über die Nebendiagonale 21 und nicht 15.
- <http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/msuzuki/MagicSquare.html>
Hier finden Sie magische Quadrate bis zur Ordnung 20×20 .
- <http://www.treasure-troves.com/math/MagicSquare.html>
<http://user.chollian.net/brainstm/MagicSquare.htm>
Ausführliche Informationen über magische Quadrate.



Datteln in Dänemark

Immer wieder wird man mit einfachen Zahlenspielen konfrontiert, die verblüffende Ergebnisse liefern. Der mathematische Hintergrund ist meist recht einfach. Wir bringen hier nur ein Beispiel, das mit Sicherheit die Testpersonen zum Erstaunen bringt:

Denke dir eine Zahl zwischen 1 und 10. Multipliziere sie mit 9. Bilde vom Ergebnis die Ziffernsumme. Subtrahiere von dieser 5. Dem Ergebnis entspricht ein Buchstabe im Alphabet. Denke dir ein europäisches Land mit diesem Anfangsbuchstaben, welches nicht an die Schweiz grenzt. Nun denke dir eine Frucht, die mit demselben Anfangsbuchstaben beginnt. Und jetzt frage ich dich: Was haben Datteln mit Dänemark zu tun?

Die Mathematik dahinter ist extrem simpel: Man überprüft leicht, dass die Zahl $9n$ für $n = 1, 2, \dots, 10$ stets die Ziffernsumme 9 hat. Subtrahiert man nun 5, erhält man in jedem Fall 4 bzw. als zugehörigen Buchstaben *D*. Es gibt aber nur zwei Länder in Europa, die mit *D* beginnen. Deutschland scheidet aus, weil es an die Schweiz grenzt, sodass nur Dänemark übrig bleibt. Und eine Frucht mit *D* als Anfangsbuchstaben ist schwer zu finden. Man landet nach kurzem Nachdenken fast unweigerlich bei der Dattel. . .

A.2 Rationale und irrationale Zahlen